УДК 372

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Фирстова Н.И., кандидат педагогических наук, доцент,
Московский педагогический государственный университет, г. Москва
steva54@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрен процесс исследования геометрических задач и найденных решений с позиции свойств геометрической ситуации – конфигураций.

Ключевые слова: геометрические задачи, исследование, полнота решения задачи.

THE STUDY OF THE GEOMETRIC TASKS SOLVING

N.I. Firstova, candidate of pedagogic sciences, associate professor,
Moscow state pedagogical University, Moscow
steva54@mail.ru

Abstract. The article considers the process of studying geometry problems and their solutions from the standpoint of the geometric situation properties – configurations properties.

Keywords: geometrical problems, the completeness of the problem solution studying.

На современном этапе образование характеризуется усилением внимания к ученику, к его самопознанию, обращенностью ученика к окружающему миру и к себе, к умению искать и находить свое место в жизни. Образование предполагает формирование в сознании человека образа окружающего мира, который отражается в понятиях, суждениях, умозаключениях. Поэтому важнейшим условием образования человека является создание и усвоение им системы научных знаний. Умственное развитие заключается в способности переосмысливать старые и формировать новые понятия. Суть получения хорошего образования в том, что человек не просто усвоил систему понятий, суждений и умозаключений, но и овладел методикой научного поиска, стал способным к творческой деятельности. И математика, как никакой другой предмет, создает благоприятные условия для этого.

Основной задачей обучения математике в школе является развитие логического мышления, умения поиска рациональных путей для решения проблем, способности аргументировано отстаивать свои убеждения. В качестве основного средства формирования математической деятельности учащихся выступают задачи.

В решении любой задачи присутствует крупица открытия, а решение задачи собственными силами воодушевляет и мотивирует. Такие эмоции могут пробудить учащихся к умственной работе и на всю жизнь оставить свой отпечаток на уме и характере.

Решение математических задач является наиболее трудной частью деятельности школьников при изучении математики, обучение учащихся этому виду деятельности занимает одно из главных мест в общем процессе обучения. Школьников обучают математике не только лишь затем, чтобы они овладели определенной суммой математических знаний, но главное, чтобы эти знания они могли эффективно использовать в дальнейшей жизни для решения разнообразных задач, возникающих в практической деятельности. Усвоить же математические знания и научиться их применять можно лишь, решая задачи, используя при этом понятия, теоремы, зависимости в различных ситуациях.

В психологии, дидактике известны попытки дать определение задачи. Наиболее приемлемым представляется определение, данное Л.Л.Гуровой: «Задача – объект мыслительной деятельности, содержащий требование некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющих раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными ее элементами».

Согласно Л.М.Фридману по отношению между элементарными условиями и требованиями задачи делятся на такие виды: 1) определенные; 2) недоопределенные; 3) переопределенные.

Далее Фридман Л.М. указывает: «Если в задаче имеется один главный объект, а остальные являются его частями (элементами), то возможны такие случаи: 1) условия задачи определяют единственный объект; 2) условия определяют несколько различных главных объектов; 3) условия определяют бесконечное множество главных объектов; 4) условия задачи не определяют никакого главного объекта».

Как известно процесс решения математических задач состоит из следующих основных этапов: 1. Анализ задачи. 2. Схематическая запись условия. 3. Поиск способа решения задачи. 4. Осуществление способа решения. 5. Проверка найденного решения. 6. Исследование задачи и найденного решения. 7. Формулирование ответа задачи . 8. Учебно-познавательный анализ задачи и ее решения.

Из вышеперечисленных этапов решения Л.М.Фридман обязательными считает 1, 3, 4 и 7-й, а 8 этап называет особенным, который применяется к наиболее важным типовым задачам.

Этап исследования решения задачи (№6) или, как его еще называют, этап исследования полноты решения задачи, достойного внимания в данных комментариях не получил, хотя, как было сказано ранее, условия в определенных задачах могут задавать либо один главный объект, либо несколько главных объектов.

Подчеркнем, что термин “задача, содержащая неопределенность в условии” целесообразно применять вовсе не в каждом случае, когда существует несколько конфигураций удовлетворяющих условию задачи, но именно тогда, когда различны искомые элементы конфигураций. Например, если требуется найти радиус окружности, описанной около треугольника со стороной а и противолежащим углом α , то искомый радиус во всех соответствующих конфигурациях имеет одно и то же значение, радиус определен однозначно, и назвать такую задачу предложенным термином вряд ли естественно. Данный термин нецелесообразно применять к задачам на построение. Заданные в условии задачи на построение элементы конфигурации позволяют описать все множество требуемых конфигураций, а единственность, конечность или бесконечность числа таких конфигураций с точки зрения постановки задачи несущественна.

Таким образом, задачи, содержащие неопределенность в условии могут выступать средством развития исследовательской деятельности ученика. Включение таких задач в спектр геометрических задач школьного курса позволит повысить эффективность обучения математике.

В школьных задачах довольно редко предлагаются такие характеристики фигур, которые порождают неоднозначность их понимания. Характеристики отдельных элементов фигур требуют от учащихся внимательного отношения к условию, так как оно содержит некоторый вид неопределенности.

Вследствие отсутствия некоторых данных в задаче, дать четкий ответ на ее требование нельзя. Кроме того, задачи с неопределенным условием можно разделить на два типа: первые без введения необходимых данных решить нельзя, вторые приводят к неопределенности в ответах (несколько ответов).

Точно указать недостающие данные можно только в том случае, когда учащийся воспринимает формальную структуру задачи, способен установить взаимосвязь всех объектов задачи

Как правило, решение задачи с неопределенным условием завершается неопределенным ответом, в котором искомая величина может принимать значения из некоторого числового множества. Выявление этого множества и должно стать целью решения такой задачи, что достигается благодаря таким этапам решения задачи, как анализ задачи и исследование решения задачи.

Планируемый результат: анализировать условие задачи; опознавать вид задачи; прогнозировать ход решения задачи; устанавливать аналогии, исследовать решение задачи.

Умения, характеризующие достижение этого результата: выделить условие и требование задачи; выделить в задаче все отношения между элементами; выявить и установить характер каждого элемента; выделить достаточные условия для выполнения требования задачи; выполнить исследование решения задачи.

Рассмотрим примеры.

Класс: 7.

Тема: «Окружность».

Задача: Даны две окружности, радиус одной из них 3 см, расстояние между центрами 10 см. Пересекаются ли эти окружности?

Решение: Пусть r_1 см радиус первой окружности, r_2 см – радиус второй окружности. Если $r_1 + r_2 < 10$, то окружности не пересекаются, если $r_1 + r_2 \geq 10$, то окружности пересекаются. Т. о. для решения задачи требуется знать радиус второй окружности.

Класс: 9.

Тема: «Площадь параллелограмма».

Задача: В параллелограмме стороны 4 см и 5 см, а высота 3 см. Найти площадь параллелограмма.

Ответ: 12 см^2 или 15 см^2.

Вывод: В задаче не указано, к какой стороне проведена высота в параллелограмме, однако, для обоих случаев задача имеет решение.

Наиболее типичными случаями неопределенности в задаче могут являться следующие:

1. Если в задаче не указан вид треугольника в зависимости от угла, то ответы для остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольника могут быть различными.

2. Неопределенность в решении задач может возникнуть при использовании некоторого приема ее решения. Так, например, во многих задачах используется нахождение синуса угла треугольника. Но $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$, то есть нахождение синуса угла еще не позволяет однозначно определить сам угол – он может быть тупым или острым. Значит, возможно рассмотрение нескольких случаев в зависимости от вида треугольника. Изображение центра описанной окружности около треугольника также может привести к неопределенности. В условии задачи говорится о том, что около треугольника описана окружность, но расположение центра описанной окружности относительно данного треугольника не указано. Следовательно, вид треугольника определяет расположение центра:

1) если треугольник остроугольный, то центр – внутри треугольника;

2) если тупоугольный, то центр лежит вне треугольника;

3) если треугольник прямоугольный, то центр описанной окружности лежит на стороне (гипотенузе) треугольника.

В некоторых задачах треугольник задан двумя сторонами и высотой, опущенной на третью сторону, но не указано, где находится основание высоты. В зависимости от места нахождения основания высоты треугольника, вид треугольника определяется неоднозначно.

3. Неоднозначность условия и решения может возникнуть при произвольном выборе углов, удовлетворяющих условию задачи. Так, например, если в треугольнике биссектрисы или медианы образуют с его сторонами углы некоторой величины, то рассмотрению подлежит каждый из образованных углов.

4. Неопределенность условия и решения задачи может возникнуть в связи с произвольным выбором заданных или искомых точек, удовлетворяющих условию задачи. Часто приходится рассматривать случаи, когда точка находится на отрезке или вне отрезка. Точка может принадлежать или не принадлежать некоторой фигуре и т.д.

5. Неопределенность условия и решения задачи может возникнуть при произвольном выборе одноименных линейных элементов, удовлетворяющих условию задачи. Так, например, если в задаче фигурирует диагональ ромба, но не указано, какая конкретно (большая или меньшая), то рассмотрению подлежит каждая из диагоналей, в результате чего можно получить неоднозначность в ответе задачи.

6. Неопределенность решения может возникнуть в связи с различным положением ортогональной проекции на некоторую плоскость одной или нескольких точек заданной фигуры. Например, если плоскости боковых граней тетраэдра составляют с плоскостью основания равные углы, то вершина этого тетраэдра может проектироваться как в центр вписанной в основание окружности, так и в центр вневписанных окружностей.

7. Неопределенность условия и решения могут возникнуть в задачах о нескольких окружностях, сферах, неопределенность может возникнуть в результате различного положения окружностей относительно друг друга. Например, в задаче может говориться о касании двух окружностей, но не указано, каким образом они касаются: внутренним или внешним. Окружности могут пересекаться, но не указано положение их центров относительно общей хорды: либо в одной полуплоскости относительно общей хорды, либо в разных полуплоскостях. Таким образом, в зависимости от конкретной ситуации, расстояние между центрами окружностей определяется неоднозначно.

8. Неопределенность условия и решения может возникнуть из-за произвольного выбора положения заданных фигур. Например, если требуется найти расстояние между заданными точками данных фигур, но не указано положение данных фигур относительно друг друга. Для полноты решения требуется рассмотреть каждый из возможных случаев их расположения.

Литература

1. Гуртовой О.С. Некоторые приемы, облегчающие решение геометрических задач // Математика в школе. – 1996. – №2. – С. 61
2. Дегтянникова И.Н. Построение моделей к задачам с полными и неполными данными // Математика в школе. – 2001. – №2. – С.15
3. Дорофеев Г.В. О существовании конфигурации в геометрических задачах // Математика в школе. – 1987. – № 5. – С.40
4. Игнатенко В.З. Сюрпризы биссектрисы // Математика в школе. – 1998. – №5. – С. 42
5. Изаак Д.Ф. Поиски решения геометрической задачи // Математика в школе. – 1998. – №.6 – С. 30
6. Изаак Д.Ф. Поиски решения, исследование и обобщение задач по геометрии // Математика в школе. – 1998. – №2. – С.83
7. Карелина Т.М. О проблемных ситуациях на уроках геометрии // Математика в школе. – 1999. – №6. – С. 19
8. Кушнир И.А. Об исследовании неопределенности в геометрических задачах // Математика в школе. – 1991. – №3 – С. 69
9. Орлова Л.Э., Столяр А.А. Геометрические ситуации и связанные с ними задачи // Математика в школе. – 1987. – №5. – С. 33
10. Тарасенкова Н.А. «Не верь глазам своим» // Математика в школе. – 1998. – №5. – С. 19
11. Фридман Л.М., Турецкий Е.И. Как научиться решать задачи. Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1989. – 192с.